Egzamin z Rachunku prawdopodobieństwa – 14.06.2023

Z poniższych zadań należy wybrać 5. W przypadku oddania 6 zadań do końcowej punktacji będzie liczyć się 5 ocenionych najniżej. Za każde zadanie można otrzymać max. 12 punktów.

Rozwiązania zadań prosimy oddawać na oddzielnych kartkach podpisanych **czytelnie** *imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Należy dokładnie uzasadniać odpowiedzi. Wyniki należy podawać w postaci zwartych wzorów, a w przypadku odpowiedzi liczbowych, ostatecznych wyników numerycznych.*

Czas trwania: **180 minut**

A1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, o gęstości $g(x) = \frac{e^x}{e-1} 1_{[0,1]}(x)$.

(a) Wyznaczyć gęstość zmiennej $Z = X - Y$.
(b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej Z.

A2. W n rozróżnialnych urnach rozmieszczono losowo k rozróżnialnych kul (wszystkie rozmieszczenia są tak samo prawdopodobne). Niech X oznacza liczbę pustych urn. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

A3. W urnie jest N kul ($N \geqslant 2$). Dwie z nich są białe, pozostałe zielone. Gracz losuje kule z urny bez zwracania do momentu wyciągnięcia kuli białej. Niech T oznacza liczbę przeprowadzonych losowań.

(a) Wyznaczyć rozkład zmiennej T.
(b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej $\frac{1}{N-T}$.

A4. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = Ce^{-x} y 1_{\{0 \leqslant y \leqslant x\}}$

(a) Wyznaczyć stałą C.
(b) Obliczyć $\mathbb{P}(2Y \leqslant X)$.
(c) Obliczyć $\mathbb{E}((X + Y)^2 | X)$.

A5. Dwuwymiarowe wektory losowe $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na kole o środku $(0, 0)$ i promieniu 1. Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech $Z_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągu

$$W_n = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + \ldots + Z_{n-1} Z_n}.$$

A6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Dla $n \geqslant 1$ zdefiniujmy zmienną losową S_n jako moc zbioru $\{1 \leqslant i \leqslant n \colon X_{2i-1} < X_{2i}\}$, zaś zmienną T_n jako moc zbioru $\{1 \leqslant i \leqslant n \colon \lfloor nX_{2i-1} \rfloor = \lfloor nX_{2i} \rfloor\}$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x. Obliczyć

(a) $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E} S_n)$,
(b) $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(T_n > \mathbb{E} T_n)$.